

Dynamic Programming

什麼是 DP ？

解題的過程中需要先前計算過的部分結果。

連續矩陣相乘最佳化

M_1, M_2, \dots, M_n 為矩陣，且可連乘。
問如何運算可使得所需乘法次數為最少。

矩陣乘法

A 爲 $i * j$ 矩陣，
B 爲 $j * k$ 矩陣。

$C = A * B$ 爲 $i * k$ 矩陣，
計算 C 需 $i * j * k$ 次乘法運算。

註：矩陣乘法不滿足交換律，即：

$$A * B \neq B * A$$

欲求： $M1 * M2 * M3 * M4$
有以下幾種可能的計算順序

$$M1 * (M2 * (M3 * M4))$$

$$M1 * ((M2 * M3) * M4)$$

$$(M1 * M2) * (M3 * M4)$$

$$(M1 * (M2 * M3)) * M4$$

$$((M1 * M2) * M3) * M4$$

$D[i]$ 表 M_i 的 column 數，

$D[0]$ 表 M_1 的 row 數。

$C[i][j]$ 表 $M_i * \dots * M_j$ 所需的最少乘法次數，

$$C[i][i] = 0$$

$$C[i][i + 1] = D[i - 1] * D[i] * D[i + 1]$$

$$C[i][j] = \min\{ C[i][k] + C[k + 1][j] + D[i - 1] * D[k] * D[j] \mid i \leq k < j \}$$

$C[1][n]$ 即為所求。

練習

DP 與遞迴的關係

通常找到遞迴關係後就很容易得到 DP 解，
例如：Fibonacci number

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = 1$$

$$F(n) = F(n - 1) + F(n - 2)$$

Fibonacci number 的 DP 解

```
F[0] = 0;
```

```
F[1] = 1;
```

```
for( i = 2; i <= n; i++) {  
    F[i] = F[i - 1] + F[i - 2];  
}
```

休息

背包問題

給定背包容量以及各物品重量，
問是否有某種裝法可塞滿背包。

給定背包容量，以及各件物品的重量及價值，
問如何裝可使得所裝物品的總價值為最高。

背包容量為 W ，各物品重量為 W_i 。

$K(W, i)$ 表只用前 i 種物品使否可塞滿 W 大小的背包，則 $K(W, i) =$

true if $W == 0$
true if $K(W - W_i, i - 1)$ or $K(W, i - 1)$
false otherwise

```
K[0] = true;
for(i = 1; i <= W; i++)
    K[i] = false;

for(i = 0; i <= W; i++)
    for(j = 0; j < n; j++)
        if( K[i] == true )
            K[i + W[j]] = true;
```

K[W] 即為所求。

找零錢

給定幣制以及待找零錢數，
問最少需用幾枚硬幣，
或問有幾種找法。

Change(C) 表用 Coin i 換 C 元最少需要幾枚硬幣。

$$\text{Change}(0) = 0$$

$$\text{Change}(C) = \min\{ \text{Change}(C - \text{Coin } i) \mid 1 \leq i \leq n \} + 1$$

練習

ACM problemset 練習題

- 108 Maximum Sum
- 111 History Grading
- 116 Unidirectional TSP
- 136 Ugly Numbers
- 164 String Computer
- 165 Stamps
- 326 Extrapolation Using a Difference Table
- 348 Optimal Array Multiplication Sequence
- 413 Up and Down Sequences
- 437 The Tower of Babylon
- 439 Knight Moves
- 443 Humble Numbers
- 485 Pascal's Triangle of Death
- 497 Strategic Defense Initiative
- 531 Compromise
- 542 France '98
- 585 Triangles

找零錢相關

147 Dollars

166 Making Change

357 Let Me Count The Ways

以上兩頁節錄自動力核心 ACM 板精華區

謝謝大家！